

环形交叉口的优化控制*

王新华

(深圳职业技术学院, 广东 深圳 518055)

摘要: 考虑 n ($n \geq 4$) 个环形交叉路口, 利用交织段的流量约束, 建立了基于通行能力的线性规划模型。对 2 车道无控制出入口, 得到了通行能力的最优值; 对 3 车道出入口, 在左转车辆由信号控制的条件下, 给出了交叉口的最优绿信比和优化配时方法。

关键词: 环形交叉口; 通行能力; 延误; 线性规划模型; 优化配时; 车流量

中图分类号: O141.4; U491.114 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579(2009)04-0141-04

Optimal Control of Roundabout

WANG Xinhua

(Shenzhen Polytechnic, Shenzhen 518055, China)

Abstract: For the roundabout of n ($n \geq 4$) intersections, by the use of restraint of the interweave section volume, linear programming model based in capacity is established. For 2 lanes uncontrolled entrances and exits, optimal value of capacity is obtained; for 3 lanes entrances and exits, under the condition of signalized left-turn, computing method of optimal proportion of the green signal and optimal timing in every intersection is provided.

Key words: roundabout; capacity; delay; linear progress model; optimal timing; rate of traffic flow

现代环形交叉口区别于传统环形交叉口的特点有进口让路控制、绕行和进口拓宽。考虑延误和通行能力, 经 SIDRA 软件的计算可以得出以下结论^[1]: 在轻或重交通时, 四路停车会产生较长的延误; 在重交通或左转交通流很大时, 双进口车道的环形交叉口服务性能颇佳; 信号控制最适用于 3 进口车道的交叉路口, 特别是在重交通条件下。

2009 年 2 月美国国际数学建模竞赛 (MCM) 问题 A 提出了环形交叉口的优化设计与最优配时问题, 文献 [2] 就北京环形交叉口的主要特征, 在不考虑交通灯控制的前提下, 给出了 4 叉环的最优通行能力。参考 SIDRA 软件的计算结论, 本文考虑 n ($n \geq 4$) 个逆时针方向依次分布的环形交叉路口, 对出入口为 2 车道且无信号控制的情形, 推广 [2] 的结果, 得到通行能力的最优值。对出入口为 3 车道且入口左转车辆由交通灯控制的情

形, 给出各交叉口的最优绿信比和优化配时方法。

模型假设:

(1) 交叉口禁止行人和非机动车通过;

(2) $i \equiv j(\text{mod } n)$ 时, 交叉口 i 和交叉口 j 相同;

(3) 若从入口 i 进、出口 k 出的交通量记为 $x_{i,k}$, 则 $i \equiv u, k \equiv v(\text{mod } n)$ 时, 有 $x_{i,k} = x_{u,v}$ 。

1 无控制情形的最优通行能力

假设系统无信号控制; 出入口为 2 车道; 环道分内外环道; 绕环车流按逆时针方向运行; 环道上的车流与其它车流同时在有可接受的穿插间隙的条件下到达冲突点时, 享有优先通行权, 否则, 仅当对方车流中出现可接受的穿插间隙时, 本方车流才开始穿越。

1.1 交织段通行能力 Q_M 的计算 关于交织段最大通行能力的计算, 应用较为广泛的有 Wardrop 公

* 收稿日期: 2009-05-07

作者简介: 王新华 (1962 年生), 男, 讲师; E-mail: szwxh108@oa.szpt.net

式^[3]。若赋予环道上的车流优先通行权,则采用英国环境部公式^[3]

$$Q_M = \frac{160l(w+e)}{w+l} \text{ (辆/h)}$$

其中参数 l 、 w (m) 分别为交织段的长度和宽度, e (m) 为入口引道的平均宽度,当重车超过 15% 时需乘以 85% 进行修正。

1.2 通行能力优化模型 设交叉口 i 进入和流出的交通量分别为 X_i 和 Y_i (辆/h), 从入口 i 进、出口 k 出的交通量为 $x_{i,k}$ (辆/h)。注意从交叉口 i 进并出的车辆不经过环道或者被禁止, 因此可规定

$$x_{i,i} = 0。于是, 1h 内系统疏导的交通量 $Y = \sum_{j=1}^n Y_j$$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{i,j} = \sum_{i=1}^n X_i。通行能力优化的目的是使$$

进入或流出交叉口的交通量达到最大, 因此, 优化的

$$目标为 \max Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{i,j}。$$

环形交叉口最基本的约束是交织段流量的约束, 即各交织段的冲突交通量之和不超过交织段的最大通行能力 Q_M 。考虑入口 i 和出口 $i+1$ ($i=1, \dots, n$) 之间的交织段:

(1) 当外环道没有专用的右转车道时, 从入口 i 进入的所有车辆都可能会与环道上欲从交叉口 $i+1$ 驶出的出环车流或经过交叉口 i 和 $i+1$ 的绕环车流产生冲突, 因此, 1 h 内从入口 i 进入的最大

冲突交通量为 $\sum_{k=1}^n x_{i,k}$; 当外环道有专用的右转车道时, 右转车流不与任何车流发生冲突, 1 h 内从

入口 i 进入的最大冲突交通量为 $\sum_{k=1}^n x_{i,k} - x_{i,i+1}$ 。为了形成一个统一的式子, 令

$$W_{i,i+1} = \begin{cases} 0, & \text{无专用右转车道;} \\ x_{i,i+1}, & \text{有专用右转车道。} \end{cases}$$

则 1 h 内从入口 i 进入的最大冲突交通量为

$$\sum_{k=1}^n x_{i,k} - W_{i,i+1}。$$

(2) 1 h 内环道上欲从交叉口 $i+1$ 驶出的最大

冲突交通量为 $\sum_{j=1}^n x_{j,i+1} - x_{i,i+1}。$

(3) 1 h 内必须经过交叉口 i 和 $i+1$ 的最大

$$\text{绕环冲突交通量 } Q_{i,i+1} = \sum_{j=i+3}^{n+i-1} \sum_{k=i+2}^{j-1} x_{j,k}。$$

于是在 1 h 内, 入口 i 和出口 $i+1$ 之间的交织段可能产生冲突的车辆的最大总数

$$W_i = \sum_{k=1}^n x_{i,k} + \sum_{j=1}^n x_{j,i+1} + Q_{i,i+1} - W_{i,i+1} - x_{i,i+1} \quad (1)$$

通行能力优化模型为

$$\begin{aligned} \max Y &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{i,j} \\ \text{s. t. } W_i &\leq Q_M, x_{i,i} = 0, \\ x_{i,j} &\geq 0 (i, j = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (2)$$

1.3 模型的求解 由 (2) 式, 有 $\sum_{i=1}^n W_i \leq nQ_M$ 。

注意到 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{j,i+1} = Y$, 从而有

$$2Y + \sum_{i=1}^n Q_{i,i+1} - \sum_{i=1}^n W_{i,i+1} - \sum_{i=1}^n x_{i,i+1} \leq nQ_M \quad (3)$$

令 $j = m + i - 1$, $k = l + i - 2$, $d = m - l + 1$, 并交换指标 m, d 的次序, 得

$$\sum_{i=1}^n Q_{i,i+1} = \sum_{d=1}^{n-3} \sum_{m=d+3}^n \sum_{i=1}^n x_{m+i-1, m+i-1-d}$$

注意到 $\sum_{i=1}^n x_{m+i-1, m+i-1-d}$ 是从入口至出口共经过 $n-d+1$ 个交叉口的绕环车流总量, 当 i 从 1 取到 n 时, 所有交叉口都计算了一遍, 因此, 其值与 m 无关, 即

$$\sum_{i=1}^n x_{m+i-1, m+i-1-d} = \sum_{i=1}^n x_{i+d, i}$$

设右转车流的比例为 r , 从入口至出口共经过 $n-d+1$ 个交叉口的绕环车流比例为 l_{n-d+1} , 即

$$\sum_{i=1}^n x_{i,i+1} = rY, \sum_{i=1}^n x_{i+d, i} = l_{n-d+1}Y。令$$

$$L = \sum_{d=1}^{n-3} (n-d-2)l_{n-d+1}, R = \begin{cases} r, & \text{无专用右转车道;} \\ 2r, & \text{有专用右转车道。} \end{cases}$$

则 $\sum_{i=1}^n Q_{i,i+1} = LY$, $\sum_{i=1}^n W_{i,i+1} + \sum_{i=1}^n x_{i,i+1} = RY$ 。由

(3) 式, 有 $(2-R+L)Y \leq nQ_M$, 故

$$\max Y = \frac{nQ_M}{2-R+L} \quad (4)$$

1.4 应用 $n=4$ 时, $L=l_4$, (4) 式包含 [2] 中的结果。 $n=5$ 时, $L=2l_5+l_4$, 下面数据源自文 [4] (表 1)。

表1 某五叉环形交叉口测量数据

Table 1 measuring data on some five-leg roundabouts

交叉口	1	2	3	4	5	进入流量 辆/h
1	0	134	128	78	42	382
2	96	0	92	272	434	894
3	88	126	0	384	516	1 114
4	224	242	208	0	362	1 036
5	246	446	498	104	0	1 294
驶出流量	654	948	926	838	1 354	4 720

易见 $l_4 = 0.2839$, $l_5 = 0.1220$, $r = 0.2581$, 从而 $L = 0.5279$ 。假设车道宽 $H = 3.25$ m, 交织段长度 $l = 35$ m, 入口引道的平均宽度 $e = 10$ m, 环道内共有 5 条车道。

①若没有专用的右转车道, 则 $w = 16.25$ m。从而

$$Q_M = 2\,438, \max Y = \frac{5Q_M}{2-r+L} = 5\,370 \text{ (辆/h)}$$

②若有专用的右转车道, 则 $w = 13$ m。从而

$$Q_M = 2\,280, \max Y = \frac{5Q_M}{2-2r+L} = 5\,666 \text{ (辆/h)}$$

2 信号控制情形的优化配时

拓宽出(入)口从右(左)至左(右)依次为左转、直行和右转车道。环道从内至外也配置专用的 2 车道左转车道、2 车道直行车道和右转车道。由 $L = (n-3)l_n + \dots + 2l_5 + l_4$, 说明左转车辆至少需要经过 4 个交叉口, 因此, 入口 i 至出口 $i+1$ 、 $i+2$ 和 k ($i+3 \leq k \leq n+i-1$) 的车辆分别为右转、直行和左转车辆, L 为左转车辆的比例。

2.1 模型假设 假设

(1) 右转车辆在入口自由通行且不与任何车流发生冲突; 直行车辆不受信号控制, 左转车辆在入口处由交通灯控制; 左转和直行车辆按逆时针方向绕环行驶。

(2) T 为系统的最小信号周期, 满足: $3\,600 \equiv 0 \pmod{T}$ 。

(3) 交叉口 i 的黄灯时间固定为 y_i , 绿灯配时为 t_i , 绿信比 $\lambda_i = t_i/T$ 。

(4) 入口 i 从左、直行、右转车道驶入的车流量分别为 $P_i^{(l)}$ 、 $P_i^{(s)}$ 、 $P_i^{(r)}$, 驶出的车流量为 Q_i ; 由入口 i 沿左转、直行车道从出口 k 出的车流量分别为 $q_{i,k}^{(l)}$ 和 $q_{i,k}^{(s)}$ 。

2.2 模型的建立 设 $P_s = \sum_{k=1}^n P_k^{(s)}$, $P_r = \sum_{k=1}^n P_k^{(r)}$, 则 1 h 内进入系统的车辆总数

$$Y = P_s + P_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k^{(l)}$$

类似于 (1) 式, 可得到 1 h 内入口 i 和出口之间交织段的流量约束

$$W_i = \lambda_i P_i^{(l)} + P_i^{(s)} + Q_{i+1} - P_i^{(r)} + Q_{i,i+1} \leq Q_M$$

其中 $Q_{i,i+1} = \sum_{j=i+3k=i+2}^{n+i-1} \sum_{j=1}^{j-1} x_{j,k}$, $x_{i,i} = 0$, $x_{j,k} = q_{j,k}^{(s)}$ ($k = j+2$), $x_{j,k} = q_{j,k}^{(l)}$ ($j+3 \leq k \leq n+j-1$)

令

$$U_i = Q_M - Q_{i+1} - P_i^{(s)} + P_i^{(r)} - Q_{i,i+1} \quad (5)$$

注意到交叉口 i 的黄灯时间固定为 y_i (s), 从而 $t_i \leq T - y_i$ 。于是有通行能力优化模型:

$$\max Y = P_s + P_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k^{(l)},$$

$$\text{s. t. } \lambda_k P_k^{(l)} \leq U_k, 0 \leq \lambda_k \leq 1 - y_k/T \quad (6)$$

2.3 模型解释 若存在 k 使得 $P_k^{(l)} \leq U_k$, $t_k = T - y_k$, 则说明交叉口 k 不需要信号控制。

当交织段的车流量超过其通行能力时, 环道上会出现阻塞现象, 模型中的参数体现为 $U_i < 0$, 此时不能构成约束。如测量数据使某 $U_k < 0$, 则入口 k 参考其设计通行能力, 按比例调整测量数据, 使所有 $U_k > 0$, 然后再进行优化求解。

2.4 优化配时 若 $0 < U_i < P_i^{(l)}(1 - y_i/T)$ ($i = 1, \dots, n$), 则由 (6) 式, 交叉口 i 的最优绿信比

$$\lambda_i = \frac{U_i}{P_i^{(l)}} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (7)$$

系统的最优通行能力 $\max Y = P_s + P_r + \sum_{k=1}^n U_k$ 。

一般可考虑系统在周期 T 内的状况, 将 (6) 式中的等式和不等式两边同乘以 $T/3\,600$, 得到线性规划模型:

$$\max Y_T = \frac{1}{3600} [T(P_s + P_r) + \sum_{k=1}^n t_k P_k^{(l)}],$$

$$\text{s. t. } P_k^{(l)} t_k \leq U_k T, 0 \leq t_k \leq T - y_k \quad (8)$$

固定黄灯时间 y_k , 并由 $3\,600 \equiv 0 \pmod{T}$ 取定 T 值, 从而确定上界 $T - y_k$; 然后利用 MATLAB 或 Lingo 软件进行优化求解, 其最优解即为 T 内各交叉口的最优绿信时间。

由 (6) 式不难看到, 最优通行能力只由绿信比决定, 较大的 T 值不一定能使通行能力达到最优, 相反会造成车辆在入口处更长时间的延误和驾驶员情绪的烦躁。此外, 相邻交叉口绿信的一致也可能造成其饱和和入环车流之间的冲突。因此, 在求得了交叉口 i 的最优绿信时间 t_i ($i = 1, \dots, n$) 以后, 可进一步采用相位延迟方式: 间隔交叉口的

开始信号一致。即对奇数 i

交叉口 i 的优化配时: 绿灯 t_i (s), 黄灯 y_i (s), 红灯 $T - t_i - y_i$ (s);

交叉口 $i+1$ 的优化配时: 红灯 $T - t_{i+1} - y_{i+1}$, 绿灯 t_{i+1} , 黄灯 y_{i+1} 。

2.5 应用 考虑 1.4 中提供的数据, 对有专用的右转车道情形, 有 $Q_M = 2\ 280$, 从而 $U_1 = 528$, $U_2 = 950$, $U_3 = 738$, $U_4 = 754$, $U_5 = 850$ 。注意对 $i = 1, \dots, 5$, $\frac{U_i}{P_i^{(i)}} > 1$, 由 (8) 式知, 最优解 $t_i = T - y_i$, 此即说明该环形交叉口不需要信号控制。

下面数据源自文 [5] (表 2)。

表 2 某环形交叉口测量数据

Table 2 measuring data on some roundabout

交叉口	辆/h					设计通行能力
	南 1	东 2	北 3	西 4	进入 流量	
南 1	0	449	756	405	1 610	2 069
东 2	587	0	177	841	1 605	852
北 3	1 045	408	0	268	1 721	1 499
西 4	168	598	470	0	1 236	1 129
总计	1 800	1 455	1 403	1 514	6 172	5 549

假设车道宽 $H = 3.25$ m, 交织段长度 $l = 35$ m, 入口引道的平均宽度 $e = 10.5$ m, 环道内共有 5 条车道, 外环道有专用的右转车道, 则 $w = 13$, $Q_M = 2\ 330$, $U_1 = 98$, $U_2 = -142$, $U_3 = -584$, $U_4 = -308$ 。因此, 需将交叉口 2 的数据乘以 $852/1\ 605$, 交叉口 3 的数据乘以 $1\ 499/1\ 721$, 交叉口 4 的数据乘以 $1\ 129/1\ 236$, 建立新的数据表, 并计算知: $U_1 = 244$, $U_2 = 294$, $U_3 = 258$, $U_4 = 208$ 。

取 $y_k = 3$, $T = 60$, 由 MATLAB 软件解得: $t_1 = 36$, $t_2 = 56$, $t_3 = 43$, $t_4 = 29$, $T = 60$, $\max Y = 4\ 590$ 。其优化配时方案:

入口 1—绿灯 36 s, 黄灯 3 s, 红灯 21 s;

入口 3—绿灯 43 s, 黄灯 3 s, 红灯 14 s;

入口 2—红灯 1 s, 绿灯 56 s, 黄灯 3 s;

入口 4—红灯 38 s, 绿灯 29 s, 黄灯 3 s。

不难看出, 该环形交叉口信号控制下的最优通行能力远远达不到 6 172, 因此, 需对环岛进行改

造。

3 结 论

本文主要是在对 2009 年 2 月美国国际数学建模竞赛 (MCM) 提出的问题 A 进行探讨。其无控制情形的最优通行能力是最一般的结果, 对多叉环的规划设计具有重要的指导意义。

对多叉环的研究, 最好的方式是作系统仿真, 而系统仿真却需要理论模型的支持。根据 L 的表达式, 本文第一次定义了多叉环的左转与直行。所建立的模型及其求解过程, 在实际应用中完全具有可操作性。实际应用时, 先在无控状态下按时段测量出模型中的相关数据, 然后按所提供的方法进行优化求解, 从而得到该时段内的最优通行能力、最优绿信比和优化配时。

左转车辆由信号控制下的优化模型仅局限于对现有资源的优化, 其优化配时不考虑更多复杂的因素。若这种优化还不能解决实际问题, 应考虑对环岛进行改造, 如渠化或设置左转两步控制等。利用本文提供的方法可作更进一步的探讨。

参考文献:

- [1] Virginia P. Sisiopiku. 用 SIDRA 评估环形交叉口的交通特性 [EB/OL]. <http://www.chinautc.com/usa/manage/edit/UploadFile/200694161849314.pdf>, 2006 - 08 - 04/2009 - 4 - 20.
- [2] 任福田, 杨峰, 荣建, 等. 北京市环形交叉口通行能力分析 [J]. 公路交通科技, 2001, 18(3): 64 - 74.
REN F T, YANG F, RONG J, et al. Capacity analysis of roundabout in Beijing [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2001, 18(3): 64 - 74.
- [3] 张举兵. 城市道路交规 [M]. 北京: 化学工业出版社, 2006: 40 - 43.
- [4] 高云峰, 杨晓光, 伍速峰, 等. 五叉环形交叉口信号协调控制模型 [J]. 系统工程, 2006, 24(8): 27 - 31.
GAO Y F, YANG X G, WU S F, et al. The model for the signal coordinated control on Five-Leg roundabouts [J]. Systems Engineering, 2006, 24(8): 27 - 31.
- [5] 杨晓光. 厦门市莲坂环形交叉口交通改善方案 [EB/OL]. http://www.chinautc.com/Information/manage/UNCC_Editor/uploadfile/2000/25.pdf, 2006 - 10 - 26/2009 - 4 - 20.